20.07.2016

Beispiel: Newtonscher Knoten . *Es soll die duale Kurve $\mathcal{C}^*$ des Newtonschen Knotens $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F), F(X,Y,Z) = X^2(Z+X) - ZY^2$ bestimmt werden.*

Hierzu betrachtet man die Parametrisierung

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{P}^1 &\to \mathcal{C} \in \mathbb{P}^2 \\ (t_0 : t_1) &\mapsto (t_0^3 : t_0(t_1^2 - t_0^2) : t_1(t_0^2 - t_1^2)). \end{aligned}$$

Die partiellen Ableitungen nach t_0 bezihungsweise t_1 sind gegeben durch

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t_0}\varphi(t_0 : t_1) &= (3t_0^2, t_1^2 - 3t_0^2, 2t_0t_1) =: \varphi_1(t_0 : t_1) \\ \frac{\partial}{\partial t_1}\varphi(t_0 : t_1) &= (0, 2t_0t_1, t_0^2 - 3t_1^2) =: \varphi_2(t_0 : t_1). \end{aligned}$$

Durch Bilden des Kreuzprodukts lässt sich nun die Parametrisierung der dualen Kurve $\mathcal{C}^*$ bestimmen

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_0 : t_1) \times \varphi_2(t_0 : t_1) &= \begin{pmatrix} (t_1^2 - 3t_0^2)(t_0^2 - 3t_1^2) - 4t_0^2t_1^2 \\ -(t_0^2 - 3t_1^2)3t_0^2 \\ 6t_0^3t_1 \end{pmatrix} \\ &= -3\begin{pmatrix} (t_0^2 - t_1^2)^2 \\ t_0^2(t_0^2 - 3t_1^2) \\ -2t_0^3t1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Somit gilt

$$\begin{aligned} \varphi^* : \mathbb{P}^1 &\to \mathcal{C}^* \in (\mathbb{P}^2)^* \\ (t_0 : t_1) &\mapsto ((t_0^2 - t_1^2)^2 : t_0^2(t_0^2 - 3t_1^2) : -2t_0^3t_1)). \end{aligned}$$

Eliminiert man t_0 und t_1, so erhält man als Gleichung für die duale Kurve $\mathcal{C}^*$ in den Variablen u, v, w

$$\mathcal{C}^* = \mathcal{V}(F^*(u,v,w)) = -4u^4 + 4u^3w + 8u^2v^2 - 36uv^2w - 4v^4 + 27v^2w^2$$

Eine weitere Möglichkeit um die Gleichung für die duale Kurve zu erhalten, ist eine allgemeine Gerade

$$h(X,Y,Z) = uX + vY + wZ$$

nach Z aufzulösen

$$Z = -\frac{1}{w}(vY + uX).$$

Definiere

$$\begin{aligned} G(X,Y) &= w^3 F(X,Y,-\frac{1}{w}(uX+vY)) \\ &= w^3X^3 - uw^2X^3 - vw^2X^2Y + uw^2XY^2 + vw^2Y^3. \end{aligned}$$

Setzt man $X = 1$ gilt

$$G(1,Y) =: f(Y) = \underbrace{w^3 - uw^2}_{=:a} - \underbrace{vw^2}_{=:b} Y + \underbrace{uw^2}_{=:c} Y^2 + \underbrace{vw^2}_{=:d} Y^3$$

und für die Ableitung

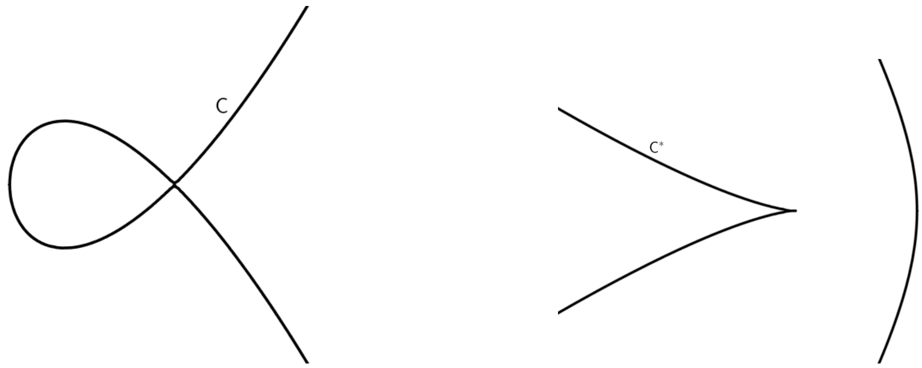
$$f'(Y) = \underbrace{-vw^2}_{=-d} + \underbrace{2uw^2}_{=2c} Y + \underbrace{3vw^2}_{=3d} Y^2.$$

Die Resultante liefert nun die Gleichung der dualen Kurve $\mathcal{C}^*$

$$\begin{aligned} R_{f,f'} &= \begin{vmatrix} a & -d & c & d & 0 \\ 0 & a & -d & c & d \\ -d & 2c & 3d & 0 & 0 \\ 0 & -d & 2c & 3d & 0 \\ 0 & 0 & -d & 2c & 3d \end{vmatrix} \\ &= 27a^2d^3 + 4ac^3d + 18acd^3 - c^2d^3 - 4d^5 \\ &= vw^{10}(-4u^4 + 4u^3w + 8u^2v^2 - 36uv^2w - 4v^4 + 27v^2w^2). \end{aligned}$$

Für $\mathcal{C}^*$ gilt also

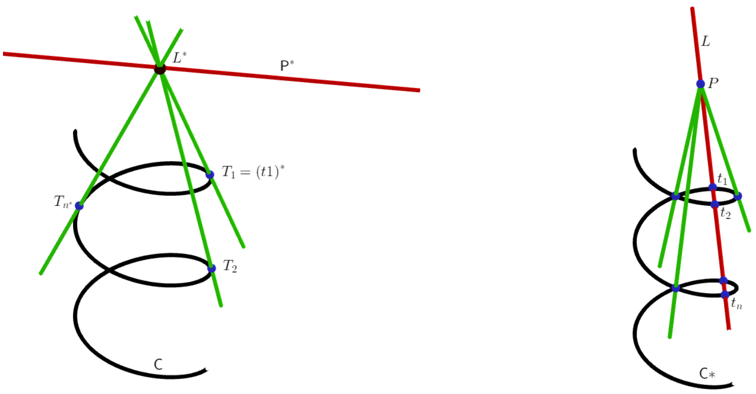
$$\mathcal{C}^* = \mathcal{V}(F^*) \text{ mit} F^*(u,v,w) = -4u^4 + 4u^3w + 8u^2v^2 - 36uv^2w - 4v^4 + 27v^2w^2.$$



(a) Newtonscher Knoten (b) Duale Kurve

6.4 Klasse einer Kurve

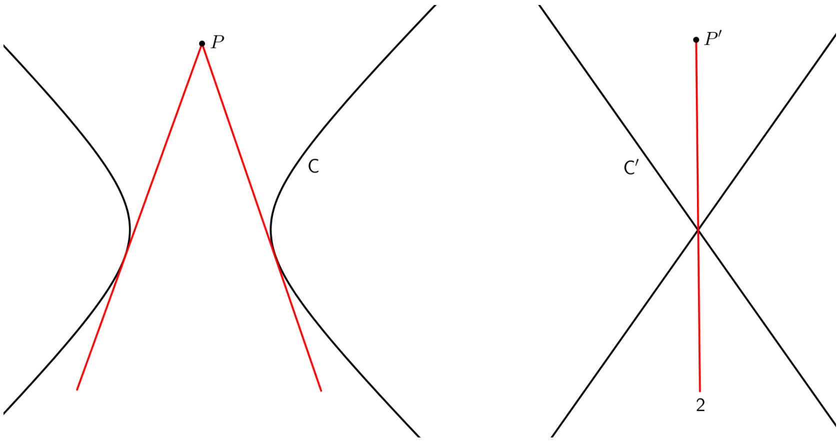
Der Grad n^* der dualen Kurve wird auch Klasse von $\mathcal{C}$ genannt.
Um n^* zu bestimmen betrachtet man eine Kurve $\mathcal{C} \subset \mathbb{P}^2$ und ihre duale Kurve $\mathcal{C}^* \subset (\mathbb{P}^2)^*$. Wähle $P \in L \subset (\mathbb{P}^2)^*$ für eine Gerade L, die nicht durch einen Punkt von $\mathcal{C}^* \cap \nabla_P \mathcal{C}^*$ geht.
Die Schnittpunkte $t_1, t_2, \ldots, t_n^*$ von L und $\mathcal{C}^*$ mit $I(\mathcal{C}^*, L, t_i) = 1$ entsprechen gerade den Tangenten an die Kurve $\mathcal{C}$, $T_i = (t_i)^*$



Das heißt, dass durch L^* genau n^* Tangenten an $\mathcal{C}$ gehen, die nicht durch Singularitäten von $\mathcal{C}$ gehen. (Dies wurde bereits beim Beweis von Riemann Clebsch und in 5.10 verwendet.)

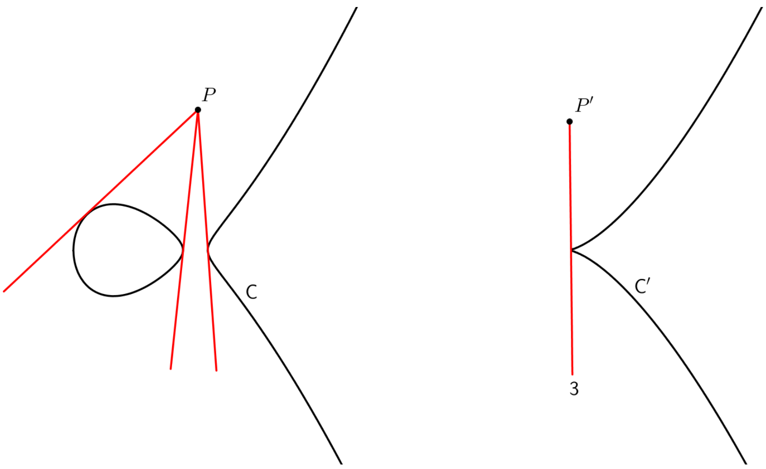
6.5 Klassenformel

Ist $\mathcal{C}$ eine glatte Kurve, so ist der Grad ihrer dualen Kurve $\mathcal{C}^*$ gegeben durch $n^* = n(n-1)$. Hat $\mathcal{C}$ Singularitäten verringert sich die Klasse.



Situation Doppelpunkt

Ein Doppelpunkt verringert die Klasse um 2, dies folgt aus der Schnittmultiplizität $I(\mathcal{C}, \nabla_p\mathcal{C}, Q) = 2$.



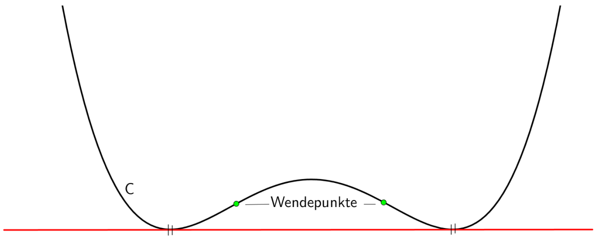
Situation Spitze

Auch hier verringert sich die Klasse durch eine Spitze, $I(\mathcal{C}, \nabla_p\mathcal{C}, Q) = 3$.
Für einen m-fach Punkt ergibt sich eine Reduktion von $\frac{m(m-1)}{2}$.

Satz. *Sei $\mathcal{C}$ eine irreduzible Kurve mit Grad$(\mathcal{C}) \geq 2$ und habe d gewöhnliche Doppelpunkte $(x^2 + y^2 + \dots)$ und s gewöhnliche Spitzen $(x^3 + y^2 + \dots)$, dann gilt*

$$n^* = n(n-1) - 2d - 3s.$$

6.6 Bitangenten und Wendepunkte



Kurve $\mathcal{C} = \mathcal{V}(F), F(x,y) = (x^2-1)^2 - y$ mit Bitangente

Die Parametrisierung dieser Kurve und dessen Ableitung lautet

$$\begin{aligned} x(t) &= t & \dot{x}(t) &= 1 \\ y(t) &= (t^2-1)^2 & \dot{y}(t) &= 4t(t^2-1) \\ z(t) &= 1 & \dot{z}(t) &= 0 \end{aligned}$$

und die Gleichung der Tangente bei t ist nun gegeben durch

$$\begin{vmatrix} X & Y & Z \\ x(t) & y(t) & z(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{vmatrix} = 0.$$

Die Koeffizienten der dualen Kurve erhält man aus den Minoren der Determinante

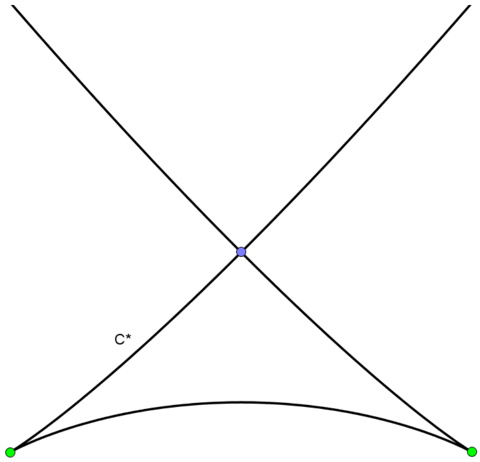
$$\begin{aligned} \left(\begin{vmatrix} y(t) & z(t) \\ \dot{y}(t) & \dot{z}(t) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} z(t) & x(t) \\ \dot{z}(t) & \dot{x}(t) \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} x(t) & y(t) \\ \dot{x}(t) & \dot{y}(t) \end{vmatrix} \right) &= \big(-4t(t^2-1) : 1 : (3t^2+1)(t^2-1)\big) \\ &= \big(u(t) : v(t) : w(t)\big). \end{aligned}$$

In der (u, w)-Ebene betrachtet gilt für die duale Kurve $\mathcal{C}^*$

$$u(t) = -4t(t^2 - 1)$$
$$w(t) = (3t^2 + 1)(t^2 - 1).$$

Elimination der Variablen t liefert für die duale Kurve $C^* = \mathcal{V}(F^*)$,

$$F^*(u, w) = \frac{27}{256}u^4 + \frac{9}{8}u^2 w - w^3 + u^2 - 256w^2.$$



Duale Kurve $\mathcal{C}^*$

Plückers Einsicht.

$$\begin{cases} \textit{Bitangenten von } \mathcal{C} & \leftrightarrow \quad \textit{Doppelpunkte von } \mathcal{C}^* \\ \textit{Wendepunkte von } \mathcal{C} & \leftrightarrow \quad \textit{Spitzen von } \mathcal{C}^* \end{cases}$$

Definition. *Eine Plückerkurve ist eine irreduzibele Kurve von Grad ≥ 2 mit der Eigenschaft, dass $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^*$ nur Doppelpunkte und Spitzen haben.*

6.7 Wendepunktformel

Hat die Kurve $\mathcal{C}$ Grad n so ist der Grad ihrer Hesseschen gegeben durch $Grad(H_\mathcal{C}) = 3(n-2)$ und die Wendepunkte liegen auf $\mathcal{C}$ und der Hesseschen. Wie auch bei der Klassenformel unterscheidet man:

$$\text{Ist } \mathcal{C} \text{ glatt} : 3n(n-2) \text{ Wendepunkte}$$
$$\text{Hat } \mathcal{C} \text{ singuläre Punkte} : \text{Die Anzahl der Wendepunkte verringert sich.}$$

Wendepunktformel. *Ist $\mathcal{C}$ eine Plückerkurve, dann gilt*

$$s^* = 3n(n-2) - 6d - 8s.$$

Hierbei entspricht d der Anzahl der Doppelpunkte und s der Anzahl der Spitzen.

Beweisidee:

Sei $f(x,y) = xy + f_3 + \dots$ die affine Gleichung für $\mathcal{C}$. Für die Hessesche von f erhält man

$$H_f = \begin{vmatrix} f_{xx} & f_{xy} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy} & f_y \\ f_x & f_y & \frac{n}{n-1} f \end{vmatrix} = \dots = \alpha xy + g_3 + \dots$$

Somit gilt für die Schnittmultiplizität der Kurve $\mathcal{C}$ und ihrer Hesseschen $H_\mathcal{C}$ in einem Doppelpunkt P

$$I(\mathcal{C}, H_\mathcal{C}, P) = 6$$

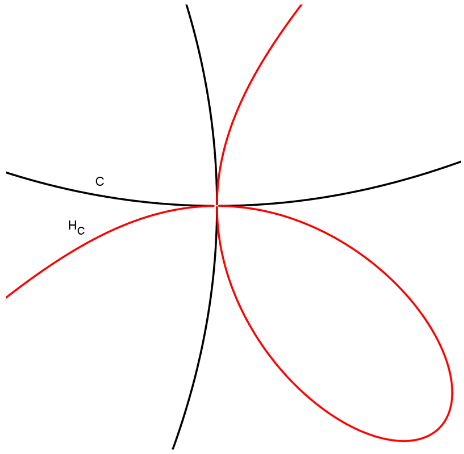
und es verschwinden somit 6 Wendepunkte.

Für den Fall einer Spitze betrachtet man

$$f(x,y) = x^2 - y^3 + \dots$$

und ein analoges Vorgehen liefert

$$I(\mathcal{C}, H_\mathcal{C}, P) = 8.$$



$\mathcal{C}$ und $H_{\mathcal{C}}$ in Umgebung eines Doppelpunkts

6.8 Plückersche Formeln

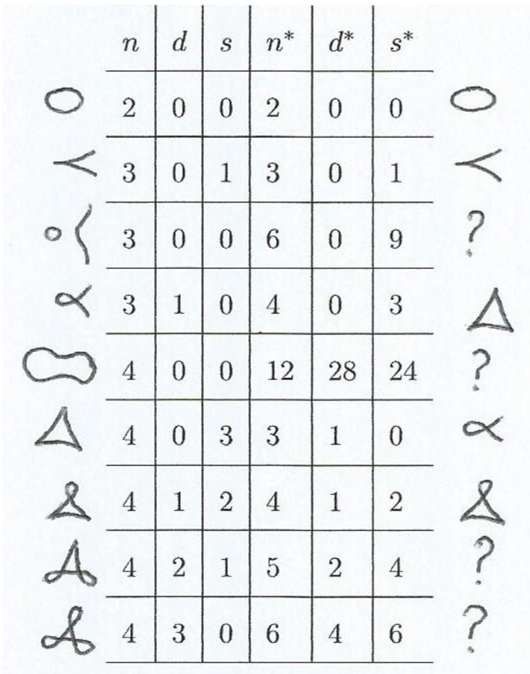
Seien $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^*$ Plückerkurven und n, d, s beziehungsweise n^*, d^*, s^* der Grad, die Anzahl der Doppelpunkte und die Anzahl der Spitzen der Kurven, so gilt

$$\begin{cases} n^* &= n(n-1) - 2d - 3s \\ s^* &= 3n(n-2) - 6d - 8s \\ n &= n^*(n^*-1) - 2d^* - 3s^* \\ s &= 3n^*(n^*-2) - 6d^* - 8s^*. \end{cases}$$

Es genügt also (n, d, s) zu kennen um n^* und s^* zu bestimmen und die dritte Gleichung liefert für d^*

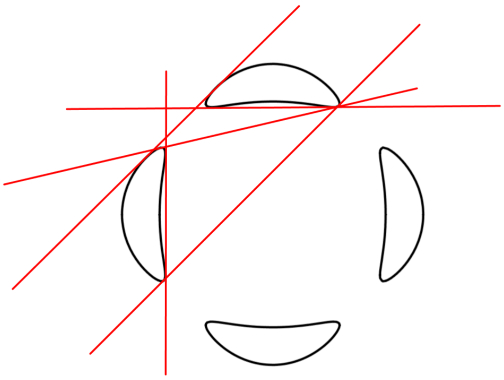
$$2d^* = n^*(n^*-1) - 3s^* - n.$$

Anhand dieser Formeln lässt sich nun eine Tabelle für die Beziehung zwischen den Plückerkurven $\mathcal{C}$ und $\mathcal{C}^*$ für kleine Grade erstellen.



	n	d	s	n^*	d^*	s^*	
	2	0	0	2	0	0	
	3	0	1	3	0	1	
	3	0	0	6	0	9	?
	3	1	0	4	0	3	
	4	0	0	12	28	24	?
	4	0	3	3	1	0	
	4	1	2	4	1	2	
	4	2	1	5	2	4	?
	4	3	0	6	4	6	?

Die sechste Zeile liefert das Resultat, dass eine glatte Quartik 28 Bitangenten hat.



Quartik mit Bitangenten

Aus den Plückerschen Formeln lassen sich nun noch zwei Folgerungen ableiten

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2} - d - s = \frac{n^*(n^*-1)}{2} - d^* - s^*,$$

was gerade

$$g(\mathcal{C}) = g(\mathcal{C}^*)$$

entspricht, wobei $g(\mathcal{C})$ das Geschlecht von $\mathcal{C}$ ist. Und als letzte Folgerung: Für $d = 0$ und $s = 0$ erhält man

$$\begin{aligned}
n^* &= n(n-1) \\
s^* &= 3n(n-2) \\
2d^* &= n^*(n^*-1) - 3s^* - n \\
&= n(n-1)(n^2-n-1) - 9n(n-2) - n \\
&= n(n-2)(n^2-9),
\end{aligned}$$

das heißt

$$d^* = \frac{1}{2}n(n-2)(n-3)(n+3)$$

und entspricht der Anzahl der Doppeltangenten an eine Kurve von Grad n.

$$\begin{aligned}
n = 4: &\quad 28 \\
n = 5: &\quad 120
\end{aligned}$$